

## Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019

Aufgaben zum Thema **Differenzierbarkeit** mit Lösungen

DR. ANTON MALEVICH, LEONARD BECHTEL, JULIAN MAAS

### Aufgabe 1 (2) Ableiten per Differentialquotient

Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen in einem beliebigen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  durch Auswerten der Differentialquotienten:

- |  |  |
|--|--|
| i) $f_1(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$ konstant | iv) $f_4(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$ |
| ii) $f_2(x) = x$                                 | v) $f_5(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ |
| iii) $f_3(x) = x^2$                              | vi) $f_6(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0)$      |

### Aufgabe 2 (3) Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Zeigen Sie:

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$  differenzierbar, so ist  $f$  auch stetig in  $x_0$ .

Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

### Aufgabe 3 (3) Regularisierung stetiger Funktionen

Seien zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben mit

$$f(x) = x \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und sei  $g(x)$  stetig im Punkt  $x_0 = 0$ .

- Zeigen Sie, dass dann  $f(x)$  in  $x_0$  differenzierbar ist. Bestimmen Sie  $f'(x_0)$  in Abhängigkeit von  $g(x)$ .
- Geben Sie ein Beispiel einer in  $x_0$  stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktion  $g(x)$ , für welche  $f'(x_0)$  existiert. Bestimmen Sie  $f'(0)$ .
- Geben Sie (falls möglich) für ihr Beispiel außerdem die komplette Ableitungsfunktion  $f'(x)$  an oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist.

Es sei nun  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion, die differenzierbar in  $x_0 = 0$  ist und es gelte  $f(x_0) = 0$ .

- Zeigen Sie, dass dann eine Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, die stetig in  $x_0$  ist und für die gilt

$$f(x) = x \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

### Aufgabe 4 (2) Beispiel Regularisierung

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

für  $n = 0, 1, 2$  auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit im Punkt  $x_0 = 0$ .

**Aufgabe 5** (3) *Vererbung der Differenzierbarkeit*

Es seien  $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in D$  differenzierbar und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Beweisen Sie, dass dann folgende Funktionen ebenfalls differenzierbar in  $x_0 \in D$  sind, indem Sie ihre Ableitungen in  $x_0$  angeben:

i)  $h_1(x) := \lambda f(x) + \mu g(x)$  (Linearkombinationen diffbarer Funktionen)

ii)  $h_2(x) := f(x)g(x)$  (Produkte diffbarer Funktionen)

iii)  $h_3(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$   $g(x) \neq 0 \forall x \in D$  (Quotienten diffbarer Funktionen)

iv)  $h_4(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$  (Kompositionen diffbarer Funktionen)

Wobei für die letzte Teilaufgabe iv) gelte  $f : D \rightarrow E$  ist differenzierbar in  $x_0 \in D$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar in  $y_0 := f(x_0)$ .

**Aufgabe 6** (1) *Ableiten*

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung der bekannten Ableitungsregeln:

i)  $f_1(x) := x^5 - 5x^4 + 6x - 2$

vi)  $f_6(x) := (x^4 + 4x) \cos x$

ii)  $f_2(x) := 2x^3 - 5x - 3 \sin x + \sin \frac{\pi}{8}$

vii)  $f_7(x) := \frac{x^2 - \sin(x^2 + 1)}{(\cos(2x))^2}$

iii)  $f_3(x) := \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 1}$

viii)  $f_8(x) := \cot x$

iv)  $f_4(x) := \tan x$

ix)  $f_9(x) := \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

v)  $f_5(x) := (2x^3 - 3x + 4 \sin x)^7$

x)  $f_{10}(x) := x^x$

**Aufgabe 7** (2) *Logarithmische Ableitung*

i) Beweisen Sie mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass gilt

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

ii) Beweisen Sie nun, dass für jede differenzierbare Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

*Bemerkung:* Das ist die sog. *logarithmische Ableitung* der Funktion  $f(x)$ .

iii) Berechnen Sie unter Verwendung der Regel aus ii) die Ableitungen von

•  $f(x) = (1 + x)(1 + e^{x^2})$

•  $g(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

**Aufgabe 8** (3) *Zusammenhang Monotonie und Ableitung*

Sei für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ , die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

- i)  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \iff \quad f(x) \text{ monoton steigend auf } [a, b]$
- ii)  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \iff \quad f(x) \text{ monoton fallend auf } [a, b]$
- iii)  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \implies \quad f(x) \text{ streng monoton steigend auf } [a, b]$
- iv)  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \implies \quad f(x) \text{ streng monoton fallend auf } [a, b]$

*Achtung:* Die Umkehrung der letzten beiden Aussagen gilt im Allgemeinen nicht. Überlegen Sie sich dazu jeweils ein Beispiel.

**Aufgabe 9** (3) *Identitätssatz der Differentialrechnung*

Sei für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$  und  $c \leq d$ , die Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

- i)  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \iff \quad f(x) = k \text{ für ein } k \in \mathbb{R}$
- ii)  $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b) \quad \iff \quad f(x) = g(x) + k \quad \forall x \in (a, b) \text{ für ein } k \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 10** (3) *Anwendung Mittelwertsatz*

Eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass  $f$  konstant ist.

**Aufgabe 11** (2) *Zum Satz von Rolle*

Betrachten Sie die zusammengesetzte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Ist der Satz von Rolle anwendbar? Begründen Sie.

**Aufgabe 12** (1) *Extremwertbestimmung I*

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen  $f_i : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  jeweils den maximalen Definitionsbereich  $D$ , sowie Art und Lage aller ihrer Extrempunkte.

- i)  $f_1(x) := \frac{\ln x - 1}{x}$
- ii)  $f_2(x) := \frac{2x + 3}{x^2 - 4}$
- iii)  $f_3(x) := \sqrt{3x - 5}$
- iv)  $f_4(x) := 2((\ln x)^2 - 1)$

**Aufgabe 13** (2) *Extremwertbestimmung II*

Gegeben ist die Schar der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f_a(x) := x^2 + ax + a^2$  mit  $a \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass jede dieser Funktionen genau einen Tiefpunkt hat und bestimmen Sie danach die Gleichung der Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf der die Tiefpunkte aller Funktionen  $f_a$  liegt.

**Aufgabe 14** (2) *Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen*

Lösen Sie folgende Textaufgaben zur Bestimmung von Extremwerten unter Nebenbedingungen:

- i) Eine zylinderförmige Konservendose mit (vorgegebenen) Volumen  $V$  soll aus Weißblech hergestellt werden. Dabei soll der Blechverbrauch möglichst gering sein. Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und den Durchmesser  $d$  der Dose.
- ii) Aus einer rechteckigen Blechtafel mit 480mm Länge und 300mm Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt. Welche Kantenlänge  $x$  müssen die herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen  $V$  des Behälters möglichst groß wird? Wie groß wird dann das Volumen  $V$ ?
- iii) In eine Kugel mit dem Durchmesser  $D$  soll ein möglichst großer Zylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie den Durchmesser  $d$  und die Höhe  $h$  des Zylinders.
- iv) Ein Wasserstollen soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. Wie groß sind die Stollenwandhöhe (also die, des Rechtecks)  $h$  und der Durchmesser  $D$  zu wählen, damit der Stollen bei einer Querschnittsfläche von  $5m^2$  einen möglichst kleinen Umfang hat?
- v) Ein Hochregallager mit einem Gesamtvolumen von  $500m^3$  soll möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei belaufen sich die Kosten für die Wände auf  $1000€/m^2$ , die der Decke auf  $600€/m^2$  und die für den Boden auf  $400€/m^2$ . Welche Maße sollten verwendet werden, wenn ein quadratischer Grundriss gewählt wird?

**Aufgabe 15** (2) *Taylorpolynom I*

Die Funktion  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ .

- i) Finden Sie eine allgemeine Formel für die  $n$ -te Ableitung ( $n \in \mathbb{N}$ ) von  $f$  und beweisen Sie diese.
- ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  und schätzen Sie das Restglied auf dem Intervall  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  ab.

*Lösung.*

- i) Durch Berechnen der ersten Ableitungen ergibt sich die Vermutung, dass

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^{n+1}}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , welche man mit Induktion beweist.

- ii) Es ergibt sich für das Taylorpolynom

$$T_2(f, x, 0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x - x^2.$$

Für die Abschätzung des Restgliedes berechnen wir für  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  und  $\theta \in [x, 0]$  falls  $x \leq 0$  bzw.  $\theta \in [0, x]$  falls  $x \geq 0$ .

$$|f(x) - T_2(f, x, 0)| = |R_3(x, 0)| = \left| \frac{x^3}{(\theta+1)^4} \right| = \frac{|x^3|}{(\theta+1)^4} \leq \frac{\frac{1}{2^3}}{(-\frac{1}{2}+1)^4} = 2$$

Da  $|x^3|$  für  $x = \pm\frac{1}{2}$  maximal wird (Monotonie) suchen wir für  $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  den Wert, für den der Nenner minimal und damit der Bruch maximal wird.

□

**Aufgabe 16** (2) *Taylorpolynom II*Gegeben Sei die Funktion  $f(x) := \sqrt[3]{2x+2}$ ,  $x \geq -1$ .

- i) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 3$  auf.
- ii) Schätzen Sie das Lagrange-Restglied zum Taylorpolynom 2. Grades für  $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$  unabhängig von  $x$  ab.

*Lösung.*

- i)  $T_2(f, x, 3) = 2 + \frac{1}{6}(x-3) - \frac{1}{72}(x-3)^2$
- ii)  $R_3(x, 3) = \frac{40}{81}(x-3)^3(2\xi+2)^{-\frac{8}{3}}$  mit  $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$  und  $\xi$  zwischen 3 und  $x$ , also  $\xi \in [x, 3]$ . Sowohl  $|(x-3)^3|$  als auch  $|(2\xi+2)^{-\frac{8}{3}}|$  werden maximal für  $x = \xi = -\frac{1}{2}$  und wir erhalten durch Einsetzen die (sehr schlechte, aber korrekte) Abschätzung

$$|R_3(x, 3)| \leq \frac{1715}{81}$$

□

**Aufgabe 17** (3) *Taylorreihe*Berechnen Sie alle Ableitungen  $f^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  der Funktion  $f$  und geben Sie damit die Taylorreihe für  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  an.

- i)  $f(x) = \sin(3x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- ii)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  $|x| \leq 1$ .

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren diese Reihen?